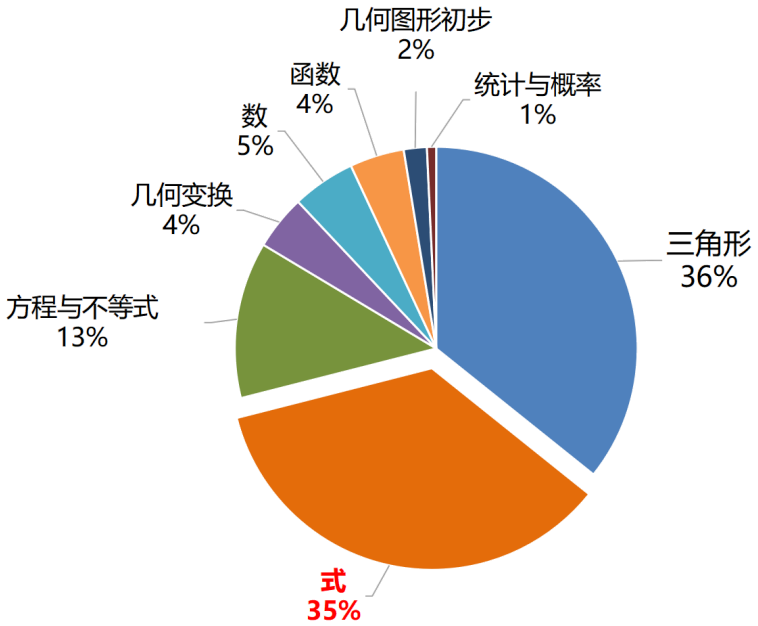
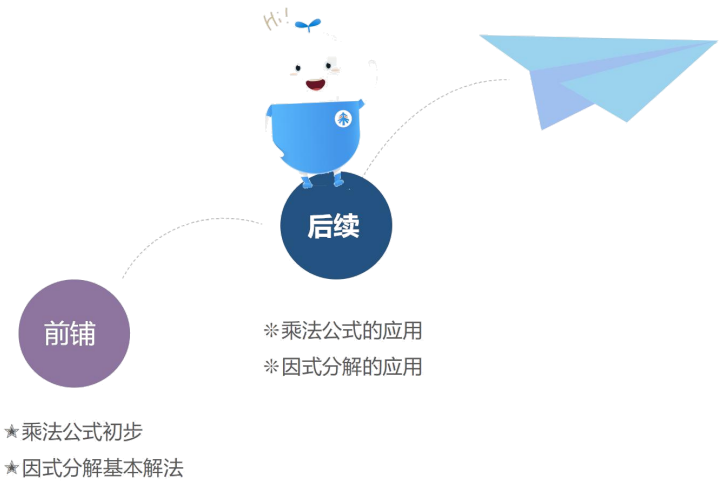
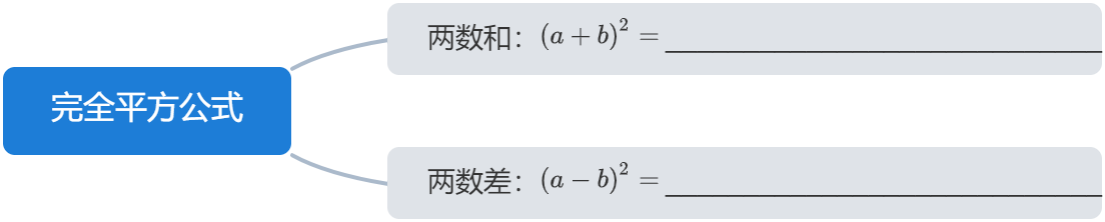
乘法公式的应用

知己知彼





一、 配方法



【教法备注】

完全平方和	完全平方差
两数的和的平方，等于它们的平方和，加上它们的积的2倍	两数的差的平方，等于它们的平方和，减去它们的积的2倍
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

【方法】**“首平方，尾平方，2倍首尾放中央，中央符号随前方”**

【注意】两数和与两数差的完全平方公式，统称为完全平方公式．

【教法备注】

①完全平方公式的常见变形：

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab;$

$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2);$

$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$

$a^2+b^2=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2]$.

$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$.

②拓展：

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca;$

配方思想

配方思想是对完全平方公式的运用，只要多项式中含有$a^2\pm2ab+b^2$的成分，就可以配出完全平方式．

【教法备注】

【方法】

① 已知二次项和常数项求一次项时注意有两种情况．

② 已知二次项和一次项求常数项时，先将通过添加括号将二次项的系数变成1，再在括号中添加一次项系数一半的平方，在减去同一个数，最后去括号整理即可．

【注意】一旦式子里的字母个数比较多，可能需要多次尝试配方，最后要检查配出的完全平方展开后是否和原式相等，如果不相等就要继续尝试．

例题

1. 若$x^2+(m-3)x+4$是一个完全平方式，则m的值是 _____ ．

【答案】7或-1

【解析】根据题意得：$(m-3)x=\pm 2x\times 2$，

则$m-3=\pm 4$，

解得：$m=7$或-1．

【标注】【知识点】利用完全平方式求参数的值

【重点强调】

2019~2020学年11月天津和平区天津市益中学校初二上学期月考第14题

2. 用配方法将二次三项式a^2-4a+5变形，结果是（　）．

A. $(a-2)^2+1$　　B. $(a+2)^2-1$　　C. $(a+2)^2+1$　　D. $(a-2)^2-1$

【答案】A

【解析】$\because a^2-4a+5=a^2-4a+4-4+5$，

$\therefore a^2-4a+5=(a-2)^2+1$．

【标注】【知识点】配方思想的运用

【重点强调】

2015~2016学年10月天津和平区天津市第二十一中学初三上学期月考第9题3分

3. 若$a^2+2a+b^2-6b+10=0$，则$a^2-b^2=$ _____ ．

【答案】-8

【解析】原式可化为$(a+1)^2+(b-3)^2=0$，

$a=-1$，$b=3$

故答案为-8．

【标注】【知识点】配方思想的运用

【重点强调】

2017~2018学年12月天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初二上学期月考第19题3分

4. 如果$a+2b+3c=12$，且$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，则$a+b^2+c^3=$_____.

【答案】14

【解析】由题意可知$a=b=c=2$，故$a+b^2+c^3=2+2^2+2^3=14$.

【标注】【知识点】配方思想的运用

5. 若$m^2-2mn+2n^2-8n+16=0$，求m、n的值.

解：$\because m^2-2mn+2n^2-8n+16=0$，

$\therefore (m^2-2mn+n^2)+$（_____）$=0$，

即（_____）$^2+$（_____）$^2=0$. 根据非负数的性质，

$\therefore m=n=$_____.

阅读上述解答过程，解答下面的问题，

设等腰三角形ABC的三边长a、b、c，且满足$a^2+b^2-4a-6b+13=0$，求△ABC的周长.

【答案】$n^2-8n+16$；$m-n$；$n-4$；4；

第一种情况2，2，3，周长$=7$.

第二种情况3，3，2，周长$=8$.

【解析】$\because m^2-2mn+2n^2-8n+16=0$，

$\therefore (m^2-2mn+n^2)+(n^2-8n+16)=0$，

即$(m-n)^2+(n-4)^2=0$.

根据非负数的性质，

$\therefore m=n=4$，

故答案为：$n^2-8n+16$；$m-n$；$n-4$；4；

已知等式变形得：$(a-2)^2+(b-3)^2=0$，

所以$a=2$，$b=3$，

第一种情况2，2，3，周长$=7$．

第二种情况3，3，2，周长$=8$．

【标注】【知识点】三角形的周长与面积问题

【知识点拨】

三角形三边关系：$|a-b|<c<a+b$

【重点强调】

2018~2019学年天津南开区天津市南开翔宇学校初二上学期期中第22题10分

6. 阅读下面的材料并解答后面的问题：

小聪：你能求出x^2+4x-3的最小值吗？如果能，其最小值是多少？

小明：能，求解过程如下：

因为：$x^2+4x-3=x^2+4x+4-4-3=(x^2+4x+4)-(4+3)=(x+2)^2-7$．

而对任意x的取值，总有$(x+2)^2\geqslant 0$，只有当$x=-2$时，$(x+2)^2$取得最小值为0，所以x^2+4x-3的最小值是-7．

（1）根据小明的求解过程，你能否求出x^2-4x+5的最小值？如果能，请写出你的求解过程．

（2）请直接写出$-x^2-4x+3$的最大值是_____．

【答案】（1）最小值为1．

（2）7

【解析】（1）$x^2-4x+5=x^2-4x+4-4+5=(x-2)^2+1$，∴当$x=2$时，$x^2-4x+5$取得最小值，最小值为$1$．

（2）$-x^2-4x+3=-x^2-4x-4+4+3=-(x+2)^2+7$，

∴当$x=-2$时，$-x^2-4x+3$最大，最大值为7．

【标注】【知识点】配方思想的运用

练习

7. 已知y^2+my+1是完全平方式，则m的值是（　）.

A. 2　　B. ± 2　　C. 1　　D. ± 1

【答案】B

【解析】$\because y^2+my+1$是完全平方式，

$\therefore m\pm 2$.

故选$\mathbf{B}$.

【标注】【知识点】利用完全平方式求参数的值

【重点强调】

2019~2020学年天津南开区天津市南开翔宇学校初二上学期期中第6题3分

8. 如果$x^2+8x+m=(x+n)^2$，则$m+n=$_____.

【答案】20

【解析】$\because x^2+8x+m=(x+n)^2$

$=x^2+mx+n^2$，

$\therefore 8=2n$，$m=n^2$，

$\therefore n=4$，$m=16$，

$\therefore m+n=20$，

故答案为20.

【标注】【知识点】利用完全平方式求参数的值

【重点强调】

2018~2019学年12月天津河北区天津市汇森中学初二上学期月考第11题

9. 用配方法将代数式$4x^2-4x+2$变形，正确的是（　）.

A. $(2x-2)^2-2$　　B. $(2x-1)^2+2$　　C. $(2x-1)^2+1$　　D. $(2x-2)^2+1$

【答案】C

【解析】$4x^2-4x+2=0$

$4x^2-4x+1=0$

$(2x-1)^2+1=0$.

【标注】【方法】配方法

【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

10. 已知$x^2+y^2-8x-12y+52=0$，则$(3x-2y)^2=$（　）.

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. 4

【答案】B

【解析】$\because x^2+y^2-8x-12y+52=0$，

$\therefore x^2-8x+16+y^2-12y+36=0$，

$\therefore (x-4)^2+(y-6)^2=0$.

$\because (x-4)^2\geqslant 0$，$(y-6)^2\geqslant 0$，

$\therefore x=4$，$y=6$，

$\therefore (3x-2y)^2=(3\times 4-2\times 6)^2=0$.

【标注】【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

11. 若实数a，b满足$a+b^2=1$，则a^2+2b^2的最小值_____.

【答案】1

【解析】$\because a+b^2=1$，

$\therefore b^2=1-a$，

$\therefore a^2+2b^2=a^2+2-2a=(a-1)^2+1$，

$\because (a-1)^2\geqslant 0$，

$\therefore (a-1)^2+1\geqslant 1$，

故答案为：1 .

【标注】【知识点】配方求最值

【重点强调】

2016~2017学年10月天津南开区天津市南开中学初三上学期月考第17题3分

12. 若$M=2a^2+4ab+5b^2-12bc+37c^2-2ac+11$，则$M$的最小值为 _____

【答案】11

【解析】$M=2a^2+4ab+5b^2-12bc+37c^2-2ac+11$

$=a^2+4ab+4b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-12bc+36c^2+11$

$=(a+2b)^2+(a-c)^2+(b-6c)^2+11$，

∴最小值为11．

【标注】【知识点】配方求最值

13. 已知a、b、c为△ABC三边的长．

（ 1 ）求证：$a^2-b^2+c^2-2ac<0$．

（ 2 ）当$a^2+2b^2+c^2=2b(a+c)$时，试判断△ABC的形状．

【答案】（ 1 ）证明见解析．

（ 2 ）△ABC为等边三角形．

【解析】（ 1 ）$a^2-b^2+c^2-2ac=(a-c)^2-b^2=(a-c-b)(a-c+b)<0$．

（ 2 ）∵$a^2+2b^2+c^2=2b(a+c)$，

∴$(a-b)^2+(b-c)^2=0$，

∴$a=b=c$，

∴△ABC等边三角形．

【标注】【知识点】因式分解的应用

【方法】配方法

14. 选取二次三项式ax^2+bx+c（$a\neq0$）中的两项，配成完全平方式的过程叫配方．例如

①选取二次项和一次项配方：$x^2-4x+2=(x-2)^2-2$；

②选取二次项和常数项配方：$x^2-4x+2=(x-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2}-4)x$，或

$x^2-4x+2=(x+\sqrt{2})^2-(4+2\sqrt{2})x$；

③选取一次项和常数项配方：$x^2-4x+2=(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2-x^2$．

根据上述材料，解决下面问题：

（1）写出x^2-8x+4的两种不同形式的配方．

（2）已知$x^2+y^2+xy-3y+3=0$，求x^y的值．

（3）已知a、b、c为三条线段，且满足$14(a^2+b^2+c^2)=(a+2b+3c)^2$，试判断$a$、$b$、$c$能否围成三角形，并说明理由．

【答案】（1）$(x-4)^2-12$，

$(x-2)^2-4x$．

（2）1．

（3）a、b、c三条线段不能围成三角形．

【解析】（1）x^2-8x+4

$=x^2-8x+16-16+4$

$=(x-4)^2-12$；

x^2-8x+4

$=(x-2)^2+4x-8x$

$=(x-2)^2-4x$．

（2）$x^2+y^2+xy-3y+3=0$，

$(x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}(y-2)^2=0$，

$x+\frac{1}{2}y=0$，$y-2=0$，

$x=-1$，$y=2$，

则$x^y=(-1)^2=1$．

（3）原式变形为$14a^2+14b^2+14c^2-(a^2+4b^2+9c^2+4ab+6ac+12bc)=0$，

即$(2a-b)^2+(3a-c)^2+(3b-2c)^2=0$，

$\therefore b=2a$，$c=3a$，$3b=2c$．

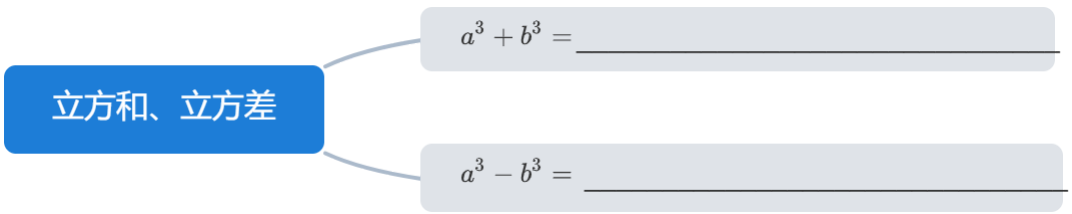
$\therefore a+b=3a=c$.

$\therefore a$、b、c三条线段不能围成三角形 .

【标注】【知识点】判断能否构成三角形

二、 复杂乘法公式

1. 立方和、立方差公式



立方和：$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$；

立方差：$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

【教法备注】

1．讲解立方和、立方差公式时要引导学生理解公式的结构：等号左端是一个一次式和一个二次三项式的乘积，其中一次式是两个字母（或数）的和差、二次三项式是这两个字母的平方和与积的和差，等号右端是这两个字母的立方和差 .

2．这两个公式的推导很容易，记忆却不容易，这里教师要用转化思想和类比思想来引导学生：

先把立方和公式左右两端的 b替换成$-b$，那么就可以得到立方差公式，因此只要记忆立方和公式、在使用时对关于b的一次项变号即可；

接下来根据公式的名称“立方和”可以先写出一次因式、二次因式中的平方和以及等号右端——$(a+b)(a^2+____+b^2)=a^3+b^3$，为避免乘开后出现$ab^2$和$a^2b$所以要减去$ab$.

变形

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab]$，

$a^3-b^3=(a-b)[a^2+ab+b^2]=(a-b)[(a-b)^2+3ab]$.

【教法备注】

已知两个数的和与积可以求出这两个数的立方和，已知这两个数的差与积就可以求出这两个数的立方差（不必求解二元方程组） .

拓展：

高次方和差公式：

$(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1}\right)=a^n+b^n$（ n为奇数），

$(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)=a^n-b^n$（ n为正整数）.

例题

15. 若$x-y=1$，$x^3-y^3=2$，则$x^2+xy+y^2=$_____ .

【答案】2

【解析】$x^2+xy+y^2=(x^3-y^3)\div(x-y)=2$.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

16. 利用立方和、立方差公式填空：

（ 1 ）$(b-$_____$)\left(4a^2+2ab+b^2\right)=b^3-8a^3$

（ 2 ）$(x+3y)(x^2-$_____$+9y^2)=x^3+27y^3$

（ 3 ）$(m+2n)($_____$-2mn+$_____$)=m^3+8n^3$

（ 4 ）$\left(2m+n^2\right)\left(4m^2-2mn^2+n^4\right)=$_____ .

（ 5 ）$(x-2y)^2\cdot\left(x^2+2xy+4y^2\right)^2=$_____ .

【答案】（ 1 ）$2a$

（ 2 ）$3xy$

（ 3 ）m^2；$4n^2$

（ 4 ）$8m^3+n^6$

（ 5 ）$x^6-16x^3y^3+64y^6$

【解析】（ 1 ）$b^3-8a^3=b^3-(2a)^3=(b-2a)(b^2+2ab+4a^2)$.

（ 2 ）$x^3+27y^3=x^3+(3y)^3=(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$.

（ 3 ）$m^3+8n^3=m^3+(2n)^3=(m+2n)(m^2-2mn+4n^2)$.

（ 4 ）$(2m+n^2)(4m^2-2mn^2+n^4)=8m^3+n^6$.

（ 5 ）$(x-2y)^2\cdot(x^2+2xy+4y^2)^2$

$=[(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)]^2$

$=(x^3-8y^3)^2$

$=x^6-16x^3y^3+64y^6$.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

17. 若$m-n=3$，求m^3-n^3-9mn的值（　）.

A. 25　　B. 27　　C. 29　　D. 31

【答案】B

【解析】解法一：

由$m-n=3$可得，

原式$=(m-n)(m^2+mn+n^2)-9mn=3m^2-6mn+3n^2=3(m-n)^2=27$.

解法二：

由$m-n=3$可得，

$(m-n)^3=m^3-3m^2n+3mn^2-n^3=m^3-n^3-3mn(m-n)=m^3-n^3-9mn=27$

.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

18. 已知$a+b=5$，$a^2+b^2=13$，则$ab=$_____，$a^3+b^3=$_____ .

A. 6，35　　B. 6，125　　C. 12，35　　D. 12，135

【答案】A

【解析】$ab=\dfrac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}=\dfrac{25-13}{2}=6$，

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]$

$=5\times(25-3\times6)$

$=35$.

故选A .

【标注】【知识点】和与差的立方公式

练习

19. 计算：$(2x-1)(4x^2+2x+1)$

【答案】$8x^3-1$.

【解析】略

【标注】【知识点】整式乘除的综合

20. 计算：$(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16)=$_____ .

【答案】x^6-64

【解析】$(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16)$
$=(x^2-4)(x^4+4x^2+16)$
$=(x^2)^3-4^3$
$=x^6-64$.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

21. 若$a+b=5$，求a^3+b^3+15ab的值为_____ .

【答案】125

【解析】a^3+b^3+15ab
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+15ab$
$=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]+15ab$
$=(a+b)^3=5^3=125$.
故答案为125 .

【标注】【知识点】和与差的立方公式

22. 计算：

（1）$\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(a^2-\frac{1}{3}a+\frac{1}{9}\right)\left(a^2+\frac{1}{3}a+\frac{1}{9}\right)$.

（2）$(b+3a)\left(9a^2-3ab+b^2\right)$.

（3）$(2a+b)^2\left[4a^2-(2a-b)b\right]^2$.

【答案】（1）$a^6-\frac{1}{729}$.

（2）b^3+27a^3.

（3）$64a^6+16a^3b^3+b^6$.

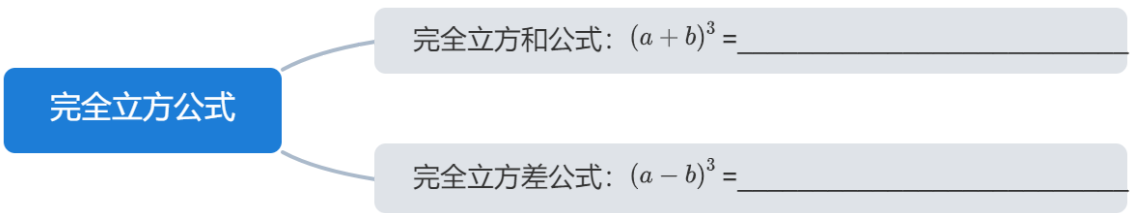
【解析】（1）$\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(a^2-\frac{1}{3}a+\frac{1}{9}\right)\left(a^2+\frac{1}{3}a+\frac{1}{9}\right)=\left(a^3-\frac{1}{27}\right)\left(a^3+\frac{1}{27}\right)=a^6-\frac{1}{729}$.

（2）$(b+3a)\left(9a^2-3ab+b^2\right)=(b+3a)\left(b^2-3ab+9a^2\right)=b^3+(3a)^3=b^3+27a^3$.

（3）$(2a+b)^2\left[4a^2-(2a-b)b\right]^2=(2a+b)^2\left(4a^2-2ab+b^2\right)^2=\left(8a^3+b^3\right)^2=64a^6+16a^3b^3+b^6$.

【标注】【题型】题型：立方和与立方差公式

2. 完全立方公式



完全立方和公式：

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

完全立方差公式：

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

【教法备注】

完全立方和（或差）公式指的是两数和（或差）的立方等于这两个数的立方和（或差）与每一个数的平方乘以另一个数3倍的和（或差）.

【注意】立方和立方差与完全立方公式是不同的：前者是先立方再加减、后者是先加减再立方 .

例题

23. 计算：$(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y)^3=$（　）.

A. $\frac{27}{8}x^3+\frac{1}{8}y^3+\frac{27}{8}x^2y+\frac{1}{8}xy^2$

B. $\frac{27}{8}x^3+\frac{1}{8}y^3+\frac{1}{8}x^2y+\frac{9}{8}xy^2$

C. $\frac{27}{8}x^3+\frac{1}{8}y^3+\frac{1}{8}x^2y+\frac{1}{8}xy^2$

D. $\frac{27}{8}x^3+\frac{1}{8}y^3+\frac{27}{8}x^2y+\frac{9}{8}xy^2$

【答案】D

【解析】$(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y)^3=\frac{27}{8}x^3+\frac{1}{8}y^3+\frac{27}{8}x^2y+\frac{9}{8}xy^2$

【标注】【知识点】和与差的立方公式

24. 已知$(x-1)^3=ax^3+bx^2+cx+d$，则$a+b+c+d$的值为（　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 不确定

【答案】B

【解析】$\because(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$，

$\therefore a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$，

$\therefore a+b+c+d=0$.

故选B.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

25. 计算：

$(a+2b)(a-2b)(a^4-8a^2b^2+16b^4)$.

【答案】$a^6-12a^4b^2+48a^2b^4-64b^6$.

【解析】$(a+2b)(a-2b)\left(a^4-8a^2b^2+16b^4\right)=\left(a^2-4b^2\right)^3=a^6-12a^4b^2+48a^2b^4-64b^6$.

【标注】【题型】题型：立方和与立方差公式

练习

26. 计算：$(4a^2-\frac{5}{2}b)^3=$（　）.

A. $64a^6-120a^4b+75a^2b^2-\frac{125}{8}b^3$　　B. $56a^6+120a^4b+75a^2b^2+\frac{125}{8}b^3$

C. $56a^6-120a^4b-75a^2b^2+\frac{125}{8}b^3$　　D. $64a^6+120a^4b-75a^2b^2-\frac{125}{8}b^3$

【答案】A

【解析】$(4a^2-\frac{5}{2}b)^3=64a^6-120a^4b+75a^2b^2-\frac{125}{8}b^3$

【标注】【知识点】和与差的立方公式

27. 已知实数x,y满足方程组$\begin{cases}x^3+y^3=19\\x+y=1\end{cases}$ 则$x^2+y^2=$_____ .

【答案】13

【解析】$x^3+y^3=(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]$,

$\therefore 1-3xy=19$, $xy=-6$,

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1+12=13$.

【标注】【知识点】多元二次方程（组）

28. 利用完全立方公式计算：

（ 1 ）$(x+2)^3$.

（ 2 ）$(4a-5b)^3$.

（ 3 ）

$\left(\frac{1}{2}x^2-4y\right)^3$.

（ 4 ）$\left(-3m^2-2n^2\right)^3$.

（ 5 ）$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}\right)$.

【答案】（ 1 ）$x^3+6x^2+12x+8$.

（ 2 ）$64a^3-240a^2b+300ab^2-125b^3$.

（ 3 ）$\frac{1}{8}x^6-3x^4y+24x^2y^2-64y^3$.

（ 4 ）$-27m^6-54m^4n^2-36m^2n^4-8n^6$.

（ 5 ）$x^6-\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{16}x^2-\frac{1}{64}$.

【解析】（ 1 ）$(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$.

（ 2 ）$(4a-5b)^3=64a^3-240a^2b+300ab^2-125b^3$.

（ 3 ）

（ 4 ）略

（ 5 ）略

【标注】【知识点】和与差的立方公式

我学会了什么